

# Dynamique de l'Innovation Financière dans un Modèle de Croissance Endogène à deux secteurs

Jude EGGOH\*<sup>†</sup>

Première Version : Avril 2007

## Abstract

Ce papier met en évidence l'innovation financière dans un modèle de croissance endogène à deux secteurs. Sous l'hypothèse que l'innovation financière est régie par un processus dynamique à l'instar des connaissances dans les modèles de Lucas (1988) et Romer (1990), on obtient un équilibre de croissance endogène où chaque pays converge vers son état stationnaire en fonction des paramètres de son économie. Aussi, nous avons pu identifier les leviers de politiques économiques qui permettront à chaque pays, compte tenu de son niveau initial d'atteindre l'équilibre stable où la croissance économique et l'innovation financière seraient optimales. L'étude de la divergence entre l'équilibre compétitif et l'équilibre optimal suggère que le planificateur social alloue mieux les ressources entre les secteurs réel et financier que le marché et que les interventions publiques sont nécessaires pour permettre à l'économie d'atteindre l'équilibre optimal. Enfin dans la dernière partie, nous avons procédé à une analyse de la dynamique transitoire qui a permis de mettre en évidence la réaction des variables macroéconomiques du modèle suite aux chocs à court terme.

- *Mots Clés* : Innovation Financière, Croissance Endogène.
- *Classification J.E.L.* : G20, O31, O41.

## 1 Introduction

Le système financier est de nos jours au cœur de l'économie moderne. Il est alors évident que la finance soit essentielle pour la croissance et pour les transactions économiques. Ce serait donc surprenant pour un non économiste qu'il y ait des débats académiques très florissants et une littérature théorique et empirique aussi abondante sur le sujet. Cependant, plusieurs raisons justifient ces développements. En effet, le rôle de la finance dans la croissance économique a longtemps été occulté pour plusieurs raisons : la prééminence de la théorie keynésienne au cours des décennies 50 et 60

---

\*LEO, Université d'Orléans. Rue de Blois. BP 6739. 45067 Orléans Cedex 2. E-mail : jude.eggoh@yahoo.fr.

<sup>†</sup>Je remercie le Professeur Patrick VILLIEU, pour ses conseils et recommandations. Toutefois les erreurs qui sont dans ce document relèvent de ma responsabilité.

; aussi, la littérature néoclassique d'avant les années 70 considère la finance comme allant de soit. La théorie néoclassique traditionnelle enseigne dans sa plus grande tendance que la finance ne joue pas un rôle déterminant dans la consommation ou dans les décisions d'investissement. Ce qui amène à supposer de façon implicite que "*la finance est neutre*". Un exemple illustratif de cet état de chose est le modèle de Modigliani et Miller (1958), dans lequel il est montré que la structure de financement de l'entreprise n'a aucune importance sur sa performance.

Cependant, à partir des contributions significatives de Goldsmith (1968), McKinnon (1973) et Shaw (1973), de nombreux auteurs ont montré l'importance de la finance dans le développement et l'amélioration du bien-être des agents économiques. A cet effet, certains auteurs considèrent à juste titre la finance comme le socle de base ou la pierre angulaire du développement (Flood, 1992), ou encore le "*sang*" qui circulerait dans l'économie (Van Horne, 1985). Malgré cette place de choix du secteur financier, qui fait de ce dernier le promoteur du développement ou l'outil de relance de la croissance économique, il faut remarquer que la littérature sur le sujet s'articule prioritairement autour des points suivants :

- La résolution des problèmes liés à l'asymétrie d'information et aux coûts de transactions ;
- L'amélioration de l'intermédiation financière ;
- La réduction du risque économique et financier ;
- La rupture de la contrainte de liquidité, etc.

Cependant, il y a un aspect essentiel du secteur financier qui semble être en partie occulté par la littérature sur le sujet : *l'innovation financière*. En effet l'activité économique est aujourd'hui révolutionnée par l'innovation financière qui s'efforce à répondre aux exigences des agents et du marché et à s'adapter aux avancées technologiques. Les nombreux distributeurs automatiques et les nouvelles opportunités d'accès aux services financiers en sont des exemples palpables. L'innovation financière peut être définie non seulement par l'élaboration de nouveaux produits financiers, mais aussi comme l'ensemble de la procédure informationnelle, structurelle et technique par laquelle la banque vise à réduire les charges par l'automatisation des démarches bancaires, à abaisser le coût de collecte de l'information et de l'épargne auprès des agents, et enfin à diminuer le risque lié à l'allocation des ressources.

Ce papier a pour objectif de prendre en compte la dynamique de l'innovation financière dans un modèle de croissance endogène<sup>1</sup> mais aussi d'intégrer le secteur financier dans la technologie de production.

---

<sup>1</sup>Bien que très peu de papiers prennent compte le développement financier dans les modèles de croissance endogène, il faudra évoquer dans ce courant de littérature les travaux de Pagano (1993), Roubini et Sala-i-Martin (1992, 1995), Berthelémy et Varoudakis (1994) et Chin et Chou (2001).

Dans le présent papier, l'innovation financière accroît la variété des produits offerts par les intermédiaires financiers afin de mobiliser et de transformer l'épargne des agents en des fonds qui seront par la suite alloués aux firmes pour des investissements productifs. L'accroissement des produits financiers se réalise en adéquation avec les besoins des prêteurs et des emprunteurs d'une part et d'autre part accroît l'efficacité du processus d'intermédiation en accélérant la croissance économique par l'augmentation du capital. De ce fait, les produits financiers à l'instar du capital et du travail intègrent directement le processus de production. De plus, il faudra ajouter que l'innovation financière fournit aussi des services de capital risque puisqu'elle permet aux institutions financières de développer les expertises nécessaires pour identifier les projets risqués dont les rendements futurs sont élevés. Aussi, le modèle est élaboré en mettant en compétition les ressources entre le secteur financier et le secteur réel. Nous montrons par la suite que l'allocation des ressources dans le secteur financier loin de ralentir la production dans le secteur réel, accélère la croissance économique compte tenu du phénomène de spillover lié à l'innovation financière.

Le présent document est organisé de la façon suivante :

D'abord, nous présentons un modèle de croissance endogène avec une innovation financière régie par un processus dynamique et déduisons ses implications économiques. Ensuite, nous étudions la divergence entre l'allocation des ressources par le planificateur social et celle réalisée par le marché. Enfin, nous réalisons une analyse de la dynamique transitoire du modèle.

## **2 Présentation du modèle**

L'environnement économique est constitué de trois catégories d'agents : les ménages ou encore les consommateurs qui maximisent leur utilité sous la contrainte de leur revenu constitué en grande partie de leur rémunération de travail. Les entreprises qui utilisent les facteurs de production à savoir le travail et le capital ont pour objectif de maximiser leur profit. Enfin, nous avons dans l'économie une troisième catégorie d'agent constituée d'intermédiaires financiers dont le rôle est de canaliser l'épargne des ménages vers les entreprises en élaborant des produits financiers par la mise au point de nouvelles technologies de collectes d'information et d'incitations à l'épargne d'une part et d'autre part, par de nouvelles modalités d'allocation du crédit ; toutes ces procédures dont l'objectif est de fluidifier les transactions financières seront qualifiées d'innovations financières.

Ce modèle se veut être le prolongement des modèles de croissance endogène prenant en compte le développement financier, qui ont connu une évolution notable à travers les travaux de Pagano (1993), Berthelémy et Varoudakis (1994, 1996), et enfin Chou et Chin (2001). Il s'inscrit également dans le cadre théorique des modèles de croissance endogène élaboré par Romer (1986, 1990), Lucas (1988) et Barro (1990).

## 2.1 Les consommateurs

Les ménages sont supposés avoir un horizon temporel infini (ménages dynastiques ou altruistes) qui se préoccupent non seulement de leur consommation présente mais aussi de la consommation des générations à venir. Nous supposons que la population ne croît pas et est normalisée à l'unité pour des raisons de simplicité. Ainsi, les agents maximisent la valeur actualisée de leur utilité future qui sera fonction du niveau de la consommation instantannée :

$$U_0 = \int_t^\infty U(c_t) \exp(-\rho t) dt, \quad (1)$$

où  $\rho > 0$  est le taux de préférence pour le présent ou encore le taux d'escompte psychologique ;  $c_t$  désigne le niveau de consommation à l'instant  $t$  ; (consommation normalisée car la population est supposée égale à l'unité). La fonction d'utilité de l'agent représentatif sera supposée de type CRRA (Constant Relative Risk Aversion), dont la forme générale est la suivante :

$$U(c_t) = \begin{cases} \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \text{pour } \sigma \neq 1 \\ \log(c_t) & \text{pour } \sigma = 1, \end{cases} \quad (2)$$

avec le coefficient d'aversion relative au risque  $\sigma > 0$ . L'inverse du coefficient d'aversion relative au risque  $\sigma^{-1}$  est l'élasticité de substitution intertemporelle.

## 2.2 Le secteur financier

On suppose que le secteur financier comprend les innovateurs financiers et les intermédiaires financiers. Le développement financier se traduira par une amélioration conjointe de l'innovation financière et de l'intermédiation financière.  $z$  indique le stock de produits financier (indicateur d'innovation financière) tandis que le fonction d'intermédiation est  $\Phi(z)$ .

Le rôle du secteur financier dans ce cas de figure est double : d'une part, le secteur financier génère des externalités qui accroissent l'efficacité marginale du capital et d'autre part améliore la transformation de l'épargne réalisée par les ménages en crédits consentis aux entreprises. En effet, l'innovation financière peut conduire non seulement à l'invention de nouveaux produits financiers mais aussi à l'amélioration de ceux existants. Les produits financiers étant des biens non rivaux ; contrairement au stock de capital par travailleur, ils peuvent s'employer indifféremment dans les secteurs réel et financier. Ceci s'explique par le fait de l'utilisation du produit financier dans la production des biens de consommation n'empêche pas qu'il soit employé comme intrant pour fabriquer de nouveaux produits financiers ou pour l'amélioration de ceux existants.

Nous supposons que la fabrication de nouveaux produits financiers est décrite par un processus d'innovation qui n'est pas la destruction créatrice comme dans le modèle

d’Aghion et Howitt (1992). Le secteur financier tel que présenté ici peut être assimilé au secteur de la recherche et développement dans le modèle de Uzawa (1965), Lucas (1988) et Romer (1990).

En effet, le secteur financier utilise le capital par unité de travail (qui se partage entre les deux secteurs) et les anciens produits financiers pour innover. L’innovation financière prend en compte l’offre de nouveaux services financiers (par exemple la banque par téléphone ou par internet, les DAB, et autres), la mise à disposition de nouvelles options financières et enfin l’amélioration des produits financiers existants pour fabriquer de nouveaux produits. Soit  $z$  le stock de produits financiers disponibles. Nous supposons que le processus de fabrication de ces nouveaux produits financiers est régi par une dynamique dont l’équation est la suivante :

$$\dot{z}_t = Bk_{zt}^\beta z_t^{1-\beta} \quad (3)$$

où  $B$  est un paramètre constant de la technologie de production de l’innovation financière,  $0 < \beta < 1$ , et  $k_{zt}$  le capital par unité de travail utilisé dans le secteur financier<sup>2</sup>.

### 2.3 Le secteur réel

Nous supposons que les entreprises sont symétriques et disposent d’une technologie de production dont la forme est la suivante :

$$f(k_t, z_t) = y_t = A\gamma(z_t)k_{yt}^\alpha \quad (4)$$

$A$  est un paramètre constant de la technologie de la production.  $\gamma(z)$  est considéré comme une externalité du secteur financier sur le secteur réel qui reflète l’intensité de l’impact de l’innovation dans le secteur financier sur le capital en vue d’un accroissement de la production pour un stock de capital donné.  $\gamma(z)$  peut être aussi considéré comme un facteur entrant directement dans la production des biens finals. Nous supposons que  $\gamma'(z) > 0$  ; ce qui veut dire que plus importante est l’innovation financière, plus grande est l’impact de l’externalité liée à l’innovation ou de la contribution de l’innovation financière dans la production ;  $\gamma''(z) < 0$  : plus le niveau d’innovation financière est élevé moins grande est son impact entant qu’externalité liée à la production ou entant que facteur de production. Cette dernière condition stipule que l’impact de l’innovation financière est plus significatif pour les niveaux de développement financier faible que pour des niveaux de développement financier élevé.  $k_{yt}$  est la quantité de capital (capital par unité de travail) utilisé dans le processus de production. En effet, il faut signaler que le capital est utilisé aussi bien

---

<sup>2</sup>Une hypothèse centrale a été faite dans ce modèle qu’il convient de signaler. En effet, dans la plupart des modèles à deux secteurs (à l’exception du modèle d’Uzawa, 1965), le capital est souvent utilisé uniquement dans la sphère de la production [Lucas (1988), Romer (1990), Jones (1995), Chin et Chou (2001), etc.] tandis que le travail est employé dans les deux secteurs. Contrairement à ces modèles, nous faisons l’hypothèse que le capital peut être aussi bien employé dans le secteur financier que dans le secteur réel.

dans le secteur réel que dans le secteur financier. Compte tenu du fait que le capital est rival, le capital employé dans la production ne peut pas l'être dans le secteur financier. Nous posons pour des raisons de simplicité que  $\gamma(z)$  se présente sous la forme suivante :

$$\gamma(z_t) = z_t^{1-\alpha} \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (5)$$

Les deux hypothèses faites ci-dessus sont bien respectées par la forme fonctionnelle que nous avons choisie.

Ainsi, la fonction de production devient :

$$f(k_t, z_t) = y_t = Ak_{yt}^\alpha z_t^{1-\alpha} \quad (6)$$

Puisque  $k_t = k_{yt} + k_{zt}$ , posons  $u_t$  la part du capital par unité de travail utilisée dans le secteur financier. On a donc  $k_{zt} = u_t k_t$  et  $k_{yt} = (1 - u_t)k_t$  ; Nous pouvons donc écrire à nouveau les équations (3) et (6), et on a :

$$f(k_t, z_t) = y_t = A[(1 - u_t)k_t]^\alpha z_t^{1-\alpha}, \quad (7)$$

$$\dot{z}_t = B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}. \quad (8)$$

Comme nous l'avons dit précédemment, le secteur financier de part son rôle innovant intervient étroitement dans la transformation de l'épargne en investissement. L'équilibre keynésien d'égalité entre l'investissement et l'épargne étant le cas extrême de la grande perfection des intermédiaires financiers, nous supposons à la suite de Pagano (1993), Berthélemy et Varoudakis (1994, 1996) et Roubini et Sala-i-Martin (1995) que l'efficacité du secteur financier se trouve aussi dans sa capacité à transformer l'épargne en investissement. Pour ce faire, nous postulons que l'épargne est investie dans une proportion  $\Phi(z_t, k_t)$ . Ainsi,  $I_t = \Phi(z_t, k_t)S_t$  ; avec  $\Phi(z_t, k_t) > 0$  ; Pour  $\Phi(\cdot) > 1$ , on est dans le cas où le taux d'investissement est supérieur à celui de l'épargne. Ainsi, le secteur financier ne procède plus uniquement à un recyclage de l'épargne constituée par les agents excédentaires mais crée de nouveaux signes monétaires afin d'accroître le niveau d'investissement. Ce cas de figure traduit un ultra développement financier. Au cas où  $\Phi(\cdot) < 1$ , le système financier ne transforme pas toute l'épargne collectée ; il y a donc des pertes liées à l'intermédiation et on est dans le cas de figure d'un sous développement financier. La dynamique d'accumulation du capital peut se présenter sous la forme suivante :

$$\dot{k}_t = \Phi(z_t, k_t)(y_t - c_t) - \delta k_t \quad (9)$$

avec  $\delta$  le taux de dépréciation du capital. Comme le montre si bien l'équation précédente, le degré de transformation de l'épargne en investissement dépend du niveau d'innovation financière et du stock de capital traduit par  $\Phi(z_t, k_t)$ . Des valeurs élevées de  $\Phi$  traduisent un processus rapide d'innovation dans le secteur financier, indicateur de développement financier, tandis que pour de faibles valeurs de  $\Phi$ , on sera dans le cas de figure où le secteur financier n'est pas innovant et par conséquent, on

sera dans une situation de sous-développement financier. Tandis que  $\gamma(z_t)$ , est un indicateur de développement financier relatant l'impact sur l'efficacité marginale du capital,  $\Phi(z_t, k_t)$  met en évidence la plus ou moins grande facilité avec laquelle, le secteur financier canalise l'épargne des ménages (disposants) vers les entreprises, qui empruntent afin d'améliorer voire de rendre plus efficace le processus de production.  $\Phi(z_t, k_t)$  montre que l'efficacité avec laquelle l'épargne est transformée en investissement dépend non seulement du niveau de développement financier mais aussi du stock de capital par tête disponible dans l'économie ; ce qui traduit le niveau de développement ou de performance du secteur financier.

Nous supposons que  $\Phi_{z_t}(z_t, k_t) > 0$  ; Ceci implique que plus le niveau d'innovation financière est élevé, meilleur est le processus d'intermédiation financière (transformation de l'épargne en investissement). Cette inégalité se justifie sur le plan pratique par le fait que dans les pays à niveau de développement financier élevé, l'épargne se transforme plus rapidement et plus facilement en investissement, tandis que dans les pays sous développés financièrement le taux de transformation est faible et les pertes d'intermédiation sont élevées.

$\Phi_{k_t}(z_t, k_t) < 0$  ; celà traduit le fait que pour des niveaux de capital faible, le processus d'intermédiation est plus efficace ; ou encore, les entreprises qui disposent d'un important stock de capital bénéficient d'un faible niveau d'intermédiation. Ainsi, une légère amélioration de la procédure d'intermédiation entraîne une croissance de l'investissement plus élevée dans les pays à faible dotation capitalistique que dans les pays à forte dotation capitalistique, compte tenu du fait que les opportunités d'investissement sont plus élevées dans les premiers que dans les seconds.

Les deux inégalités précédentes peuvent amener à postuler que :

$$\Phi(z_t, k_t) = G\left(\frac{z_t}{k_t}\right). \quad (10)$$

Ainsi, on a :  $\Phi(0, k_t) = 0$ , et  $\Phi(z_t, 0) = \infty$ . Pour des raisons de simplicité, nous allons postuler que  $G$  est une fonction dont la forme générale est la suivante :  $\Phi(z_t, k_t) = \left(\frac{z_t}{k_t}\right)^\phi$ , où  $\phi$  est une constante positive.

La dynamique d'accumulation du capital représentée par l'équation (9) peut être écrite de la façon suivante :

$$\dot{k}_t = \left[\frac{z_t}{k_t}\right]^\phi (A[(1 - u_t)k_t]^\alpha z_t^{1-\alpha} - c_t) \quad (11)$$

Pour des raisons de simplicité, comme dans l'équation précédente, nous supposons dans la suite que  $\delta = 0$ .

Le paramètre  $z$  (le stock de produits financiers) traduit le degré de sophistication des services financiers dans l'économie. Nous pensons que le secteur financier peut accroître l'efficacité au niveau microéconomique et globalement au niveau macroéconomique. En effet, il améliore le lien entre l'épargne et l'investissement. Il contribue à une efficiente allocation du capital et sa meilleure utilisation possible. Il aide aussi à la collecte et à la diffusion de l'information, puisque dans un environnement

économique caractérisé par l'imperfection des marchés financiers, l'information est très coûteuse et les individus peuvent ne pas vouloir emprunter ou prêter. De plus, si l'intermédiation financière est inexistante ou très coûteuse, les entrepreneurs seraient contraints d'autofinancer les projets. Ce qui va amener à entreprendre des projets moins efficaces. Le problème supplémentaire que le sous développement financier pose est que le capital accumulé préalablement à l'investissement peut être érodé par un taux d'inflation élevé.

D'un point de vue microéconomique et au niveau agrégé, tout cela signifie qu'une économie financièrement développée, peut être capable de transformer pour une quantité d'input donnée, le capital en un niveau d'output plus élevé.

C'est pour toutes ces raisons que nous avons postulé une technologie de production qui est fonction croissante de  $z$ , le niveau de sophistication financière de l'économie. Une telle hypothèse est également faite par Roubini et Sala-i-Martin (1992, 1995), mais avec une technologie de production linéaire. Ce qui n'est pas le cas de notre modèle.

On peut aussi mentionner qu'il y a d'autres facteurs qui peuvent affecter positivement la productivité de capital. Ces facteurs qui ont été mis en exergue dans le cadre de la littérature sur la croissance endogène, à savoir le stock de connaissances avec Romer (1990), ou les dépenses publiques avec Barro (1990) et Barro et Sala-i-Martin (1990a). Nous faisons dans le cadre de ce modèle abstraction de tous ces éléments et supposons que  $\gamma(z)$  est fonction croissante de  $z$  uniquement<sup>3</sup>.

Dans cette partie, il est non seulement pris en compte l'effet de relance économique du secteur financier mais aussi le potentiel de transformation de l'épargne en investissement du secteur financier. Le programme que va résoudre le planificateur social est le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{c_t, u_t} U_0 &= \int_0^{\infty} \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \exp(-\rho t) dt, & (12) \\ s/c & \\ \dot{k}_t &= \left[ \frac{z_t}{k_t} \right]^\phi [A((1-u_t)k_t)^\alpha z_t^{1-\alpha} - c_t] \\ \dot{z}_t &= B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}. \end{aligned}$$

## 2.4 Résolution du programme

Le Hamiltonien courant du programme ci-dessus est le suivant :

---

<sup>3</sup>Cette hypothèse a été faite par Greenwood et Jovanovic (1990) et Roubini et Sala-i-Martin (1992).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c \equiv & \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left[ \left( \frac{z_t}{k_t} \right)^\phi (A [(1-u_t)k_t]^\alpha z_t^{1-\alpha} - c_t) \right] \\ & + \mu \left[ B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

où  $c_t$  et  $u_t$  sont des variables de contrôle,  $k_t$  et  $z_t$  des variables d'état,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des variables duales associées respectivement à  $k_t$  et  $z_t$ . Dans la suite du document, pour des raisons de simplicité, nous allons occulter les indices temporels.

Les conditions de premier ordre sur les variables de contrôle sont :

$$\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial c} = c^{-\sigma} - \lambda z_k^\phi = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial u} = -\lambda \left( \frac{z_t}{k_t} \right)^\phi A z^{1-\alpha} k^\alpha \alpha (1-u)^{\alpha-1} + \mu B \beta u^{\beta-1} k^\beta z^{1-\beta} = 0. \quad (15)$$

Le long du sentier de croissance équilibrée, toutes les variables croissent au même taux  $g$ .

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left[ \frac{z}{k} \right]^\phi \left[ A(1-u)^\alpha k^{\alpha-1} z^{1-\alpha} - \frac{c}{k} \right] = g \quad (16)$$

$$\frac{\dot{z}}{z} = B u^\beta z_k^{-\beta} = g \quad (17)$$

Les conditions de premier ordre par rapport aux variables d'état donnent :

$$\dot{\lambda} = \lambda \rho + \lambda \left[ \phi g - A \alpha (1-u)^\alpha z_k^{1-\alpha+\phi} \right] - \mu \beta g z_k \quad (18)$$

$$\dot{\mu} = \mu \rho - \lambda \left[ \phi \frac{g}{z_k} + A(1-\alpha)(1-u)^\alpha z_k^{-\alpha+\phi} \right] - \mu(1-\beta)g \quad (19)$$

Enfin, les conditions de transversalité sont :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) k(t) \exp(-\beta t) = 0, \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) z(t) \exp(-\beta t) = 0. \quad (21)$$

La résultats obtenus suite à la résolution du programme ci-dessus sont :

$$u^* = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + \frac{\beta \phi}{\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + (\sigma + \beta - 1) + \frac{\rho}{g}} \quad (22)$$

A priori si on arrive à déterminer  $u^*$ , on peut déduire l'expression d'équilibre des autres variables<sup>4</sup>.

$$z_{k1}^* = \left( \frac{\rho + (\phi + \sigma)g}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha+\phi}} (1 - u^*)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\phi}} \quad (23)$$

On peut également trouver que :

$$Bu^\beta z_k^{-\beta} = g \Rightarrow z_{k2}^* = \left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* \quad (24)$$

A partir des équations (23) et (24), on peut déterminer l'expression du taux de croissance économique  $g$ . Ce résultat peut être obtenu également par graphique à partir de l'égalité ci-après :

$$\left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* = \left( \frac{\rho + (\phi + \sigma)g}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha+\phi}} (1 - u^*)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\phi}} \quad (25)$$

### 3 Implications économiques du modèle

On remarque bien qu'il soit très difficile de déterminer analytiquement l'expression du taux de croissance de l'économie, il existe cependant puisque, si tous les paramètres du modèle sont connus, on peut calculer la valeur du taux de croissance. En utilisant les deux équations caractéristiques du niveau d'innovation financière, on peut déterminer à l'aide des simulations la sensibilité du niveau d'innovation financière et du taux de croissance économique par rapport aux paramètres du modèle.

---

<sup>4</sup>Pour plus d'informations sur la résolution détaillée du programme, se référer à l'annexe du document.

Graphique 1 : Equilibre entre la croissance économique et le niveau d'innovation financière <sup>5</sup>

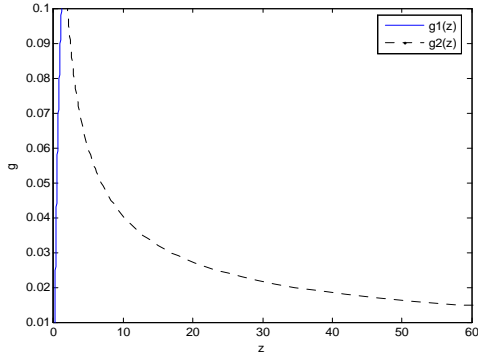


fig 1 : sigma=0.5

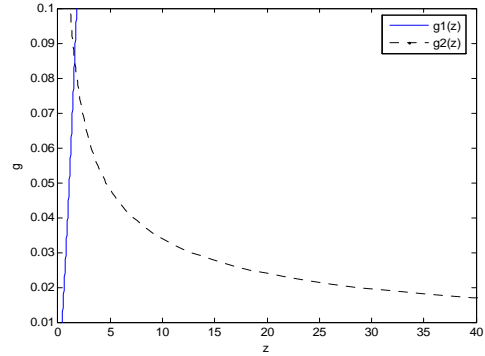


fig 2 : sigma=5

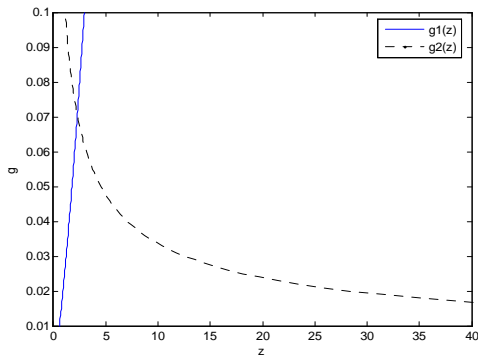


fig 3 : sigma=10

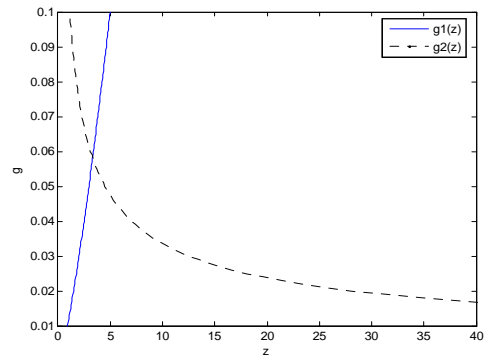


fig 4 : sigma=15

Les graphiques ci-dessus relatent des différents cas de figure qu'on peut obtenir suivant les valeurs de  $\sigma$ .

La première figure pour laquelle  $\sigma = 0.5$  reste identique pour des valeurs de  $\sigma$  relativement petites ; une telle situation est observable pour des valeurs de  $\sigma$  proches 1. Dans ce cas de figure, on remarque qu'il n'y a pas d'équilibre entre le niveau d'innovation financière et le taux de croissance économique. Ce qui implique, pour des économies où les individus ont une forte élasticité de substitution intertemporelle, qu'il n'y a pas d'équilibre entre le niveau d'innovation financière et la croissance économique. Cette situation dans certains cas de figure peut correspondre à des

<sup>5</sup>  $g_i$  est la réciproque de  $z_{ki}(\cdot)$  par rapport à  $g$ . Le graphique est représenté pour les valeurs suivantes des paramètres :  $\alpha = \beta = 0.5$  ;  $\phi = 0.8$  ;  $A = 1$  ;  $B = 0.15$  ;  $\rho = 0.02$ .

dynamiques chaotiques, qui nécessitent l'intervention de l'état afin que l'équilibre puisse s'établir. Aussi, l'analyse des figures 2, 3 et 4 révèle que le taux de croissance le plus élevé est obtenu pour  $\sigma$  donné par la figure 2 ; ainsi, pour des valeurs de l'élasticité de substitution plus faible que de la figure 2, le taux de croissance devient de plus en plus faible ; cependant l'impact sur le niveau d'innovation financière reste relativement faible. Cette situation nécessite aussi l'intervention publique qui par le truchement de politique adéquate pourra permettre d'élever le taux croissance tout en maintenant l'innovation financière à un niveau correspondant. Ainsi, il faut noter que le degré de substitution de la consommation dans le temps doit atteindre un certain niveau pour la croissance économique et de l'innovation financière soient les plus élevés possibles ; pour des niveaux d'élasticité de substitution supérieurs à ceux de la figure 2, il n'existe pas d'équilibre, tandis que pour des niveaux inférieurs, l'équilibre est sous optimal. Il faudra cependant signaler que les graphiques sont très peu sensibles aux modifications de  $\phi$  et que les équilibres obtenus sont de croissance endogène, donc dépendants des paramètres de chaque économie. Lorsqu'on fait varier  $\phi$ , pour  $\sigma$  donné, on obtient des graphiques qui traduisent bien que le taux de croissance est fonction croissante du paramètre de spillover.

Graphique 2 : Equilibre entre la croissance économique et l'innovation financière suivant le paramètre de spillover  $\phi$ <sup>6</sup>

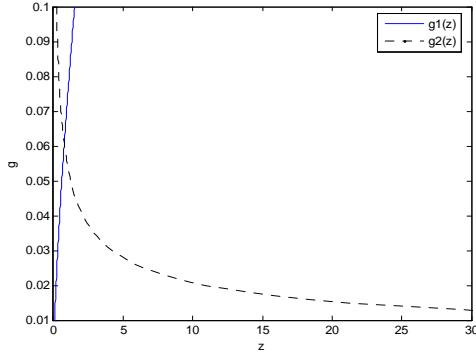


fig 1 : phi=0.2

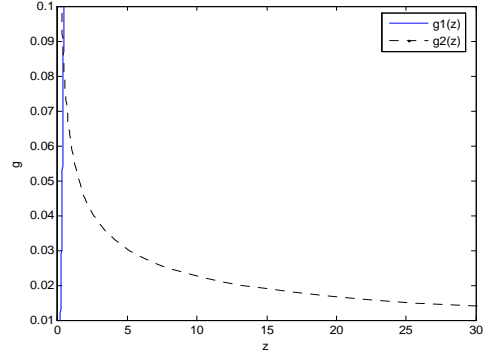


fig 3 : phi=2

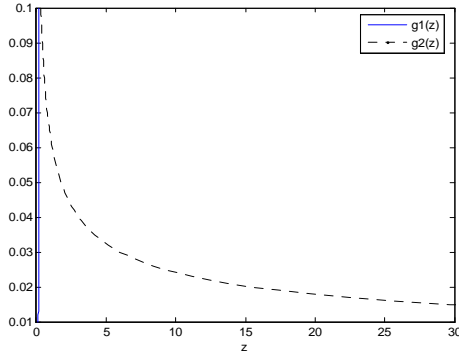


fig 3 : phi=5

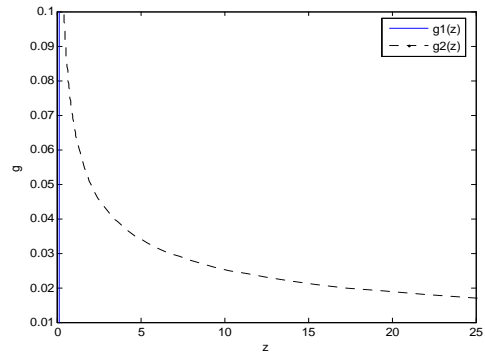


fig 4 : phi=10

Afin d'affiner l'analyse précédente, nous allons faire de la statique comparative qui nous permettra de déterminer l'impact des différents paramètres sur l'allocation du capital entre le secteur financier et le secteur réel. Mais avant, nous allons présenter la proposition suivante.

**Proposition 1 :** *La proportion du capital par unité de travail dans le secteur financier est une fonction croissante du taux de croissance. La réciproque est également vérifiée, car on démontre et nous admettons que si  $f(\cdot)$  est une fonction croissante, la réciproque  $f^{-1}(\cdot)$  est aussi une fonction croissante.*

<sup>6</sup>NB :  $g_i$  est la réciproque de  $z_{ki}(\cdot)$  par rapport à  $g$ . Le graphique est réalisé pour les valeurs suivantes des paramètres :  $\alpha = \beta = 0.5$  ;  $\sigma = 5$  ;  $A = 1$  ;  $B = 0.15$  ;  $\rho = 0.02$ .

**Proof.**

$$u^* = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\beta + \frac{\beta\phi}{\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\beta + (\sigma + \beta - 1) + \frac{\rho}{g}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial g} = \frac{1}{T^2} \left[ \left( \frac{\beta\phi \left(\frac{\rho}{g^2}\right)}{\left(\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)\right)^2} \right) T + \frac{\rho}{g^2} \left( \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\beta + \frac{\beta\phi}{\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)} \right) \right] > 0 \quad (27)$$

Avec  $T = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\beta + (\sigma + \beta - 1) + \frac{\rho}{g}$ . ■

La conséquence immédiate de cette proposition est que l'utilisation d'une forte proportion de capital par unité de travail dans le secteur financier est un signe de l'accroissement de l'innovation financière et par ricochet de croissance économique. Ainsi, le développement économique passera par le développement financier qui se manifeste par l'importance des ressources productives consacrées au secteur de l'innovation financière. Puisque la proportion de capital dans le secteur financier accélère la croissance économique, les paramètres du modèle impactent de la même manière le taux de croissance et la proportion de ressource consacrée au secteur financier.

### 3.1 Analyse de statiques comparatives à l'état stationnaire

Sur les figures suivantes nous présentons les statiques comparatives qui relatent l'évolution de la proportion du capital par unité de travail dans le secteur financier ( $u$ ) et dans le secteur réel ( $v$ ) en fonction des différents paramètres du modèle. Ainsi, comme le montre le graphique 3, la proportion de ressources productives employée dans le secteur financier est fonction décroissante de  $\alpha$ ,  $\rho$  et  $\sigma$  tandis qu'elle croît avec le taux de croissance ( $g$ ),  $\phi$  et  $\beta$ . A partir des résultats obtenus sur la fraction de ressource allouée au secteur financier, on déduit facilement les implications en ce qui concerne le secteur réel.

Graphique 3 : Impact des différents paramètres sur l'allocation du capital entre le secteur financier et le secteur réel à l'état stationnaire<sup>7</sup>

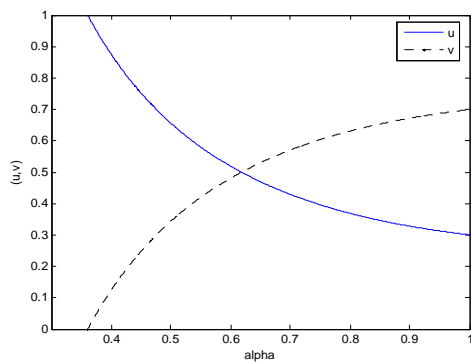


fig 1

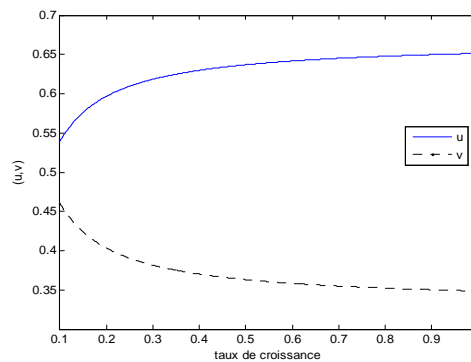


fig2

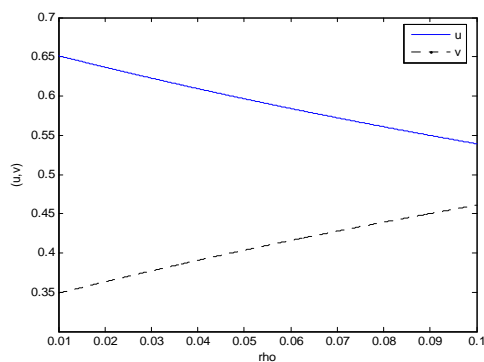


fig 3

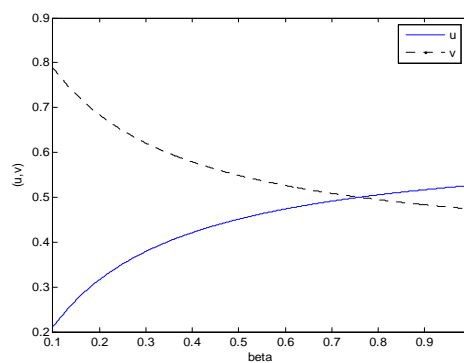


fig 4

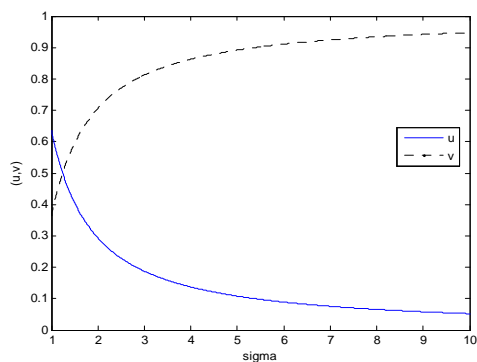


fig 5

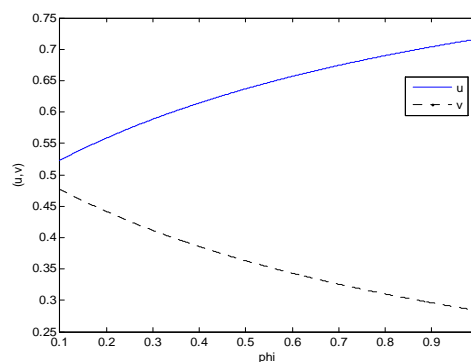


fig 6

<sup>7</sup>Pour les simulations ci-dessus, on pose :  $\alpha = \beta = \phi = 0.5$  ;  $g = 0.05$  ;  $\rho = 0.02$  ;  $\sigma = 1$ .

Puisque la proportion de capital par unité de travail utilisée dans le secteur financier est une fonction décroissante de l'aversion au risque des individus, (fonction croissante de l'élasticité de substitution intertemporelle), la croissance sera plus forte dans les économies où les agents sont moins averses au risque ; ce qui témoigne d'un climat de confiance entre les agents économiques. Cependant, il ne faudra pas perdre de vue que l'élasticité de substitution doit être à un niveau adéquat pour que l'économie n'aborde pas des dynamiques instables ou n'enregistre pas des équilibres sous optimaux. On remarque que pour  $\sigma$  voisin de 1.3, toute chose étant égale par ailleurs, les ressources se répartissent de façon équitable entre le secteur financier et le secteur réel. Ce résultat montre bien que le comportement des agents économiques influence fortement le niveau d'innovation financière. Cet état de chose est corroboré par le fait que le taux d'escompte psychologique a un impact négatif sur le niveau d'innovation financière et donc sur la croissance économique. En effet, pour des niveaux élevés du taux d'escompte psychologique, les individus consomment plus aujourd'hui que demain c'est-à-dire épargne moins compte tenu de leur anticipation du futur. Ce comportement des agents économiques a pour conséquence immédiate d'atrophier le système financier (compte tenu du faible niveau d'épargne) et par conséquent réduira le taux de croissance économique. En ce qui concerne le paramètre  $\phi$ , son impact est globalement positif sur l'allocation des ressources dans le secteur financier ; en effet, l'accroissement de  $\phi$ , favorise le détournement des facteurs de production du secteur réel vers le secteur financier à des fins de croissance économique. Le coefficient ( $\beta$ ) accroît l'allocation des ressources en faveur du secteur financier et pour des valeurs de  $\beta$  voisines de 0.75, les ressources se répartissent équitablement entre les deux secteurs. Enfin,  $\alpha$  affecte négativement l'allocation des ressources entre les secteurs réel et financier et par conséquent le taux de croissance économique.

Ainsi, par le truchement de politiques économiques appropriées, l'état peut, compte tenu de la situation économique et des objectifs visés agir sur le comportement des agents et les paramètres de l'économie pour stimuler ou freiner l'innovation financière afin de maintenir la croissance économique à un niveau optimal.

Dans le paragraphe suivant, nous allons déterminer la différence entre la solution du planificateur social et celle de l'équilibre compétitif, et nous verrons par la suite comment cette divergence varie en fonction des différents paramètres du modèle.

## 4 Divergence entre équilibre optimal et équilibre compétitif

L'étude de la divergence entre l'équilibre optimal et compétitif permet de montrer que les imperfections du marché entraînent une sous optimalité de l'allocation des ressources par le marché et révèle la nécessité des interventions publiques. En effet, l'équilibre précédemment défini, n'est valable que dans un cadre où un planificateur procède à l'allocation des ressources. Puisque l'équilibre compétitif ne tient pas

compte de l'externalité, de l'effet de spillover ou de “*business stealing*” liés à la présence de l'innovation financière, il serait intéressant de déterminer les résultats sur la base d'une allocation compétitive des ressources. Aussi, il peut être supposé l'existence d'effets externes au niveau de la dynamique de production de l'innovation financière, mais cet aspect ne sera pas pris en compte ici. Chou (2003) identifie certaines raisons qui peuvent justifier la divergence entre l'équilibre privé et l'équilibre social à savoir : l'effet de spillover ; l'effet d'apprentissage ; l'effet de “*stepping on toes*” et enfin le pouvoir de monopôle des producteurs de biens intermédiaires.

L'agent privé va alors résoudre le programme suivant :

$$\begin{aligned} \max_{c_t, u_t} U_0 &= \int_0^\infty \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \exp(-\rho t) dt, & (28) \\ s/c & \\ \dot{k}_t &= z_k^\phi [Az_t^{1-\alpha} [(1-u_t)k_t]^\alpha - c_t], \\ \dot{z}_t &= B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}. \end{aligned}$$

#### 4.1 Résolution du programme

Le Hamiltonien du programme ci-dessus est le suivant :

$$\begin{aligned} H_c \equiv & \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda z_k^\phi [Az_t^{1-\alpha} [(1-u_t)k_t]^\alpha - c_t] & (29) \\ & + \mu [B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}], \end{aligned}$$

où  $c_t$  et  $u_t$  sont des variables de contrôle,  $k_t$  et  $z_t$  des variables d'état,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des variables duales associées respectivement à  $k_t$  et  $z_t$ . Puisque que nous nous situons dans le cadre d'un équilibre compétitif, nous posons au niveau du Hamiltonien que :

$$z_k^\phi = \bar{z} \quad (30)$$

Les résultats obtenus après la résolution du programme ci-dessus sont :

$$u^* = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + (\sigma + \beta - 1) + \frac{\rho}{g}} \quad (31)$$

Le niveau d'innovation financière d'équilibre compétitif est donné par les expressions suivantes :

$$z_{k3}^* = \left( \frac{\sigma g + \rho}{A\alpha(1 - u^*)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{1+\phi-\alpha}} \quad (32)$$

$$z_{k4}^* = \left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* \quad (33)$$

Ce qui implique que :

$$\left( \frac{\sigma g + \rho}{A\alpha(1 - u^*)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{1+\phi-\alpha}} (1 - u^*) = \left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* \quad (34)$$

L'expression analytique du taux de croissance est obtenue à partir de l'équation suivante :

$$\left( \frac{\sigma g + \rho}{A\alpha(1 - u^*)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{1+\phi-\alpha}} \left[ \frac{\Gamma}{1 + \Gamma} \right] = \left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left[ \frac{1}{1 + \Gamma} \right] \quad (35)$$

où

$$\Gamma = \frac{(\sigma + \beta - 1)\alpha g + \alpha\rho}{\beta(1 - \alpha)g} \quad (36)$$

Avant d'évaluer la divergence entre l'optimum social et l'optimum privé, nous allons montrer par la proposition suivante que l'équilibre du planificateur social est préférable à celui du marché.

**Proposition 2** : *Le taux de croissance et le niveau d'innovation financière d'équilibre compétitif sont inférieurs à ceux obtenus par le planificateur social.*

**Proof.** La preuve de la proposition ci-dessus est donnée par le graphique 4. ■

Compte tenu du fait que le taux de croissance ne peut être analytiquement déterminé dans tous les cas, la proposition précédente est démontrée graphiquement. On justifie par ce fait la non internalisation du développement financier par le marché. Le graphique ci-dessous montre bien que le taux de croissance d'équilibre compétitif et le niveau d'innovation financière (correspondant au point A) sont inférieurs à ceux d'équilibre optimal (correspondant au point B). Il faudra cependant signaler que le graphique obtenu est globalement invariant suite aux modifications des paramètres et représente la tendance d'équilibre général qui se dégage. Les équilibres ci-dessous varient suivant le degré de substituabilité de la consommation dans le temps. Ainsi, à une forte élasticité de substitution correspond un niveau de croissance et d'innovation financière élevé. Ce qui s'observe sur le graphique ci-dessous puisque, les niveaux d'équilibre s'abaissent lorsque l'élasticité de substitution passe de 1/5 à 1/15. La sous optimalité de l'équilibre privé justifie les interventions publiques dont l'objectif est d'agir sur les paramètres économiques afin de faire converger l'économie vers l'équilibre optimal.

Graphique 4 : Comparaison de l'équilibre compétitif et de l'équilibre optimal<sup>8</sup>

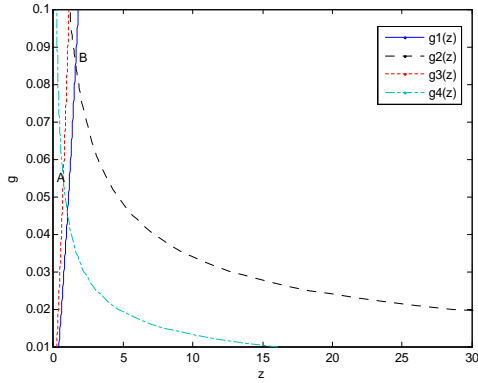


fig 1 : sigma=5

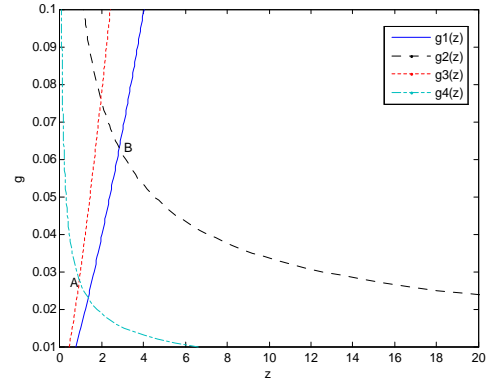


fig 2 : sigma=15

Afin de déterminer avec efficacité les stratégies de politiques économiques à mettre en oeuvre pour tendre vers l'optimum, il faudra évaluer la divergence entre l'allocation des ressources entre l'équilibre privé et l'équilibre social et voir comment cette dernière varie en fonction des différents paramètres du modèle.

Il est très facile de montrer que l'allocation des ressources à l'équilibre privé est inférieure à celle de l'équilibre social. Lorsque le paramètre de d'externalisation (ou de spillover)  $\phi$  tend vers 0, l'équilibre compétitif converge vers l'équilibre social ; ce qui est conforme aux résultats théoriques souvent obtenus. On peut à présent évaluer la divergence entre l'optimum social établi par le planificateur et l'équilibre compétitif et voir comment cette divergence varie suivant certains paramètres du modèle. Cette évaluation se fera en représentant sur un même graphique la différence entre l'allocation sociale et privée en fonction du paramètre d'externalisation  $\phi$  et d'un autre paramètre du modèle.

Comme on peut si bien l'observer sur le graphique 5, la différence entre l'optimum social et l'optimum privé est positive dans tous les cas ; ce qui veut dire que le planificateur social alloue mieux les ressources que le marché. On remarque que la divergence est une fonction croissante de  $\phi$ , lorsque ce dernier est associé avec les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\rho$ . Aussi, cette divergence ne varie pas suivant les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\rho$ . Ce qui veut dire que ces trois paramètres ne sont pas des leviers d'action efficaces pour réduire l'écart entre l'équilibre compétitif et l'équilibre social. Ce qui n'est pas le cas du coefficient d'aversion au risque  $\sigma$ . En effet,  $\sigma$  affecte la différence entre l'allocation privée et sociale, qui est d'autant plus élevée que le coefficient d'aversion au risque est élevé.

<sup>8</sup>  $g_i$  est la réciproque de  $z_{ki}(\cdot)$  par rapport à  $g$ . Les graphiques ci-dessus sont obtenus pour les valeurs suivantes des paramètres :  $\alpha = \beta = 0.5$  ;  $\phi = 0.8$  ;  $A=1$  ;  $B=0.15$  ;  $\rho = 0.02$ .

Ces résultats sont très proches de ceux obtenus par Jones (1995) où la divergence de l'allocation des ressources entre le secteur réel et celui de la recherche est très peu sensible à la contribution du travail dans la production, tandis que cette divergence est fortement influencée par le paramètre qui mesure le degré d'externalité du processus de recherche et développement dans le temps. Chou (2003) montre que le paramètre de mesure de l'effet de spillover dans la création du capital social et le paramètre qui capture l'effet de “*standing on the shoulders of giants*” dans le secteur de la recherche et développement influencent favorable la divergence de l'allocation des ressources (le travail) entre le secteur de la recherche et développement et celui de la production (plus ils sont élevés, plus la divergence s'accroît), tandis que le paramètre qui quantifie l'effet de “*stepping on toes*” dans le secteur de la recherche et développement n'affecte pas l'allocation du travail entre les différents secteurs.

Ainsi, on trouve une justification théorique aux interventions publiques qui ont pour objectif de pallier les insuffisances du marché et de permettre à l'équilibre compétitif de converger vers le niveau socialement admissible. Aussi, il faudra remarquer que cette divergence est fonction croissante de  $\phi$  (le paramètre d'externalisation de l'innovation financière) et décroissante de  $\sigma^{-1}$  (l'élasticité de substitution intertemporelle). Pour rendre efficaces les interventions publiques les leviers sont ainsi bien identifiés. Dans ce cas de figure, le seul paramètre d'action est l'élasticité de substitution intertemporelle. En effet, pour un degré d'externalité liée à l'innovation financière donnée, puisque les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\rho$  n'influencent pas la divergence allocative, le seul paramètre sur lequel on peut agir afin de faire converger l'équilibre privé vers l'optimum social est l'élasticité de substitution intertemporelle des individus (réduire le coefficient d'aversion au risque). Ce qui permetta d'assurer l'optimalité de la solution compétitive. Ce résultat est bien en concordance avec ceux obtenus précédemment (en l'occurrence le résultat du graphique 4), où un niveau faible du coefficient d'aversion au risque correspond à un taux de croissance élevé et une innovation financière plus forte.

La prochaine section est consacrée à l'analyse de la dynamique transitoire du modèle qui permet de mettre en évidence les réactions à court terme des variables macroéconomiques afin de permettre à l'économie de se situer sur le sentier de croissance stable et de converger vers l'état stationnaire.

Graphique 5 : Divergence entre l'optimum privé et l'optimum social dans l'allocation du capital par unité de travail entre les secteurs financier et réel <sup>9</sup>.

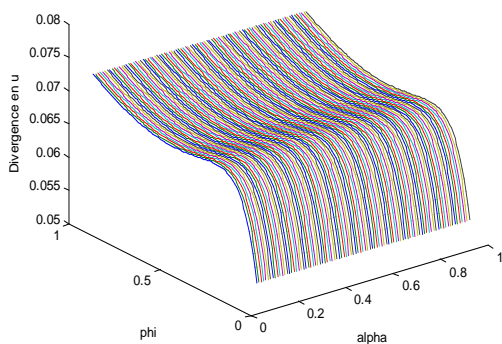


fig 1 : Impact de  $\phi$  et  $\alpha$  sur la divergence de  $u$

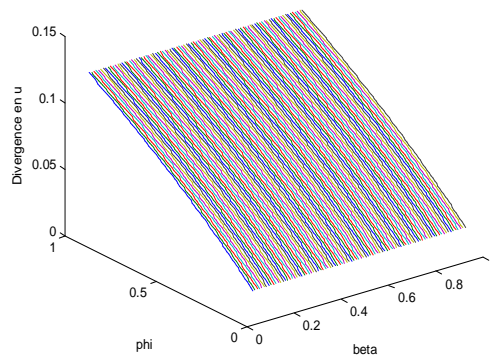


fig 2 : Impact de  $\phi$  et  $\beta$  sur la divergence de  $u$

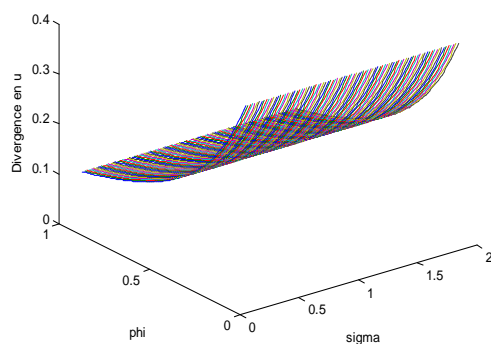


fig 3 : Impact de  $\phi$  et  $\sigma$  sur la divergence de  $u$

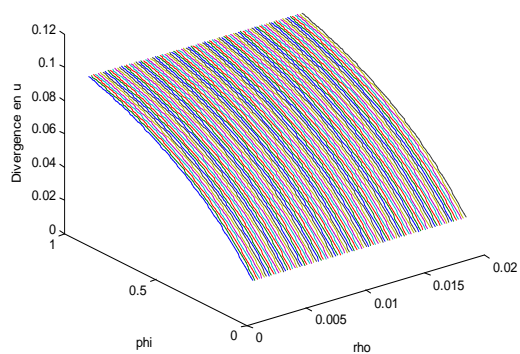


fig 4 : Impact de  $\phi$  et  $\rho$  sur la divergence de  $u$

## 5 Analyse de la dynamique transitoire du modèle

L'intérêt de la dynamique transitoire est de mettre en évidence les réponses à court et moyen termes des variables, suite aux chocs exogènes. En effet, il est supposé dans

<sup>9</sup>Les différentes valeurs des paramètres pour le graphique ci-dessus sont :  $\alpha = \beta = 0.5$  ;  $\phi = 0.8$  ;  $\sigma = 2$  ;  $\rho = 0.02$ .

les sections précédentes qu'à long terme, les taux de croissance du capital physique et de l'innovation financière sont identiques (cas d'un modèle à deux secteurs sans externalité). Cette propriété n'est plus valable à court terme lorsque l'économie ne se situe pas initialement au rapport adéquat entre le capital physique et l'innovation financière. Ici, l'évolution du modèle dynamique à deux secteurs est observée en dehors de l'état stationnaire. L'objectif de la dynamique transitoire est d'étudier comment l'agent représentatif alloue les ressources entre le secteur financier et le secteur réel afin de parvenir à l'état stationnaire.

La dynamique de notre système est entièrement déterminée par une variable d'état  $z_k$  et deux variables de contrôle  $u$  et  $c_k$ . L'évolution de l'économie peut être décrite par un diagramme de phase représenté dans l'espace  $[c_k, u, z_k]$ . Le bras stable du selle sera une courbe unidimensionnelle dans un espace, qui passera par l'état stationnaire. Ainsi, la dynamique peut être représentée par deux fonctions  $c_k(z_k)$  et  $u(z_k)$  qui sont respectivement la projection du bras stable du selle dans les plans  $[c_k, z_k]$  et  $[u, z_k]$ .

Dans le cadre de notre modèle, nous utilisons à l'instar de Mulligan et Sala-i-Martin (1993) "*la méthode d'élimination du temps*"<sup>10</sup> pour étudier la dynamique transitoire.

## 5.1 Etude de la stabilité de l'état stationnaire

Le système dynamique stationnarisé dont on étudie les propriétés de stabilité de l'état stationnaire et la dynamique transitoire se présente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}_k = Bu^\beta z_k^{1-\beta} - A(1-u)^\alpha z_k^{2+\phi-\alpha} + c_k z_k^{1+\phi} \\ \dot{u} = \frac{u(\phi+\beta-\alpha)}{[(\beta-1) + \frac{u(\alpha-1)}{1-u}]} \left[ Bu^\beta z_k^{-\beta} - A(1-u)^\alpha z_k^{1+\phi-\alpha} + c_k z_k^\phi \right] \\ \dot{c}_k = \frac{A\alpha}{\sigma} c_k (1-u)^{\alpha-1} z_k^{1-\alpha+\phi} - \left( \frac{\phi}{\sigma} + 1 \right) c_k A(1-u)^\alpha z_k^{1+\phi-\alpha} \\ \quad + \left( \frac{\phi}{\sigma} + 1 \right) c_k^2 z_k^\phi - \frac{\rho}{\sigma} c_k \end{cases} \quad (37)$$

L'étude de la stabilité du système dynamique dans le cadre de la "*méthode d'élimination du temps*" peut s'effectuer par le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres du système linéarisé autour de l'état stationnaire. Nous trouvons dans tous les cas (quelque soit la valeur des paramètres) qu'il y a une valeur propre négative et deux valeurs propres positives<sup>11</sup> ; ceci implique que le modèle est localement stable et il existe un point (ou sentier) selle. Le système n'admet donc qu'une seule trajectoire convergente associée à l'unique valeur propre stable. Le modèle est donc globalement stable au sens du sentier selle.

<sup>10</sup>Pour une présentation exhaustive de la "*méthode d'élimination du temps*", voire Mulligan et Sala-i-Martin (1993).

<sup>11</sup>Les valeurs propres et les vecteurs propres sont calculés à partir de la matrice jacobienne que nous ne présentons pas dans ce document.

**Remark 3** : *Le présent modèle de croissance endogène est globalement stable sur le sentier selle à l'instar des modèles de Uzawa (1965) et Lucas (1988), et de Rebelo (1991). Bien que ce résultat n'a pas fait l'objet d'une démonstration formelle, il provient de nombreuses simulations effectuées qui permettent de conclure qu'il n'a pas de valeurs des paramètres pour lesquelles le modèle soit instable. Des résultats analogues ont été obtenus par Mulligan et Sala-i-Martin (1993) et Villieu (1998).*

## 5.2 Dynamique transitoire de quelques variables

La dynamique transitoire des variables du modèle est décrite par le graphique 6 qui présente en abscisse la distance entre  $z/k$  et sa valeur à l'état stationnaire  $(z/k)^*$ . La droite verticale passant par zéro correspond à l'état stationnaire peut être considérée comme la ligne marginale qui sépare les pays en développement (à gauche) et les pays développés (à droite). L'ajustement de la variable d'état qui permet de converger vers l'état stationnaire peut se faire soit par le truchement du niveau d'innovation financière ou soit par le niveau du capital physique. Nous supposons dans notre analyse que le niveau du capital reste constant et la seule variable d'ajustement reste le niveau d'innovation financière. Sous cette hypothèse, les pays en développement dispose d'un niveau d'innovation financière faible [ $z/k < (z/k)^*$ ], quand  $z/k$  va s'accroître au cours du temps, le niveau d'allocation des ressources dans le secteur financier ( $u$ ) et la consommation par unité de capital vont s'accroître. Cette relation est illustrée par les figures 1 et 2 du graphique 6, qui met en évidence un processus d'ajustement du niveau d'innovation financière et un saut de la consommation pour que le ratio  $c/k$  s'ajuste sur la trajectoire correspondant à la valeur initiale de la variable. Ainsi, l'ajustement se traduira par un accroissement de la part des ressources allouées au secteur financier ( $u$ ) et du ratio de la consommation au capital ( $c_k$ ) dans les pays en développement et une baisse des deux variables dans les pays développés pour que la convergence puisse se réaliser vers l'état stationnaire.

L'ajustement au cours de la dynamique transitoire représenté par la figure 3 révèle que le taux de croissance stationnaire du capital résulterait d'une hausse de l'innovation financière dans les pays en développement et d'une baisse du niveau d'innovation financière dans les pays développés. Cette dynamique d'ajustement du capital reste proche de celle des taux de croissance de la consommation et de la production. Enfin, en ce qui concerne le taux de croissance de l'innovation financière, on peut bien remarquer sur la figure 5 que l'ajustement durant la dynamique transitoire se traduit par une hausse constante du taux de croissance de l'innovation financière dans les pays développés <sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup>Il faudra noter que cette baisse du taux de croissance de l'innovation financière dans les pays en développement n'est pas assimilable à une baisse du stock d'innovation financière.

Graphique 6 : Présentation de la dynamique transitoire du modèle <sup>13</sup>

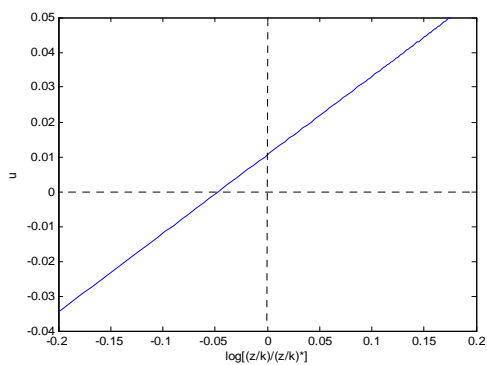


fig 1

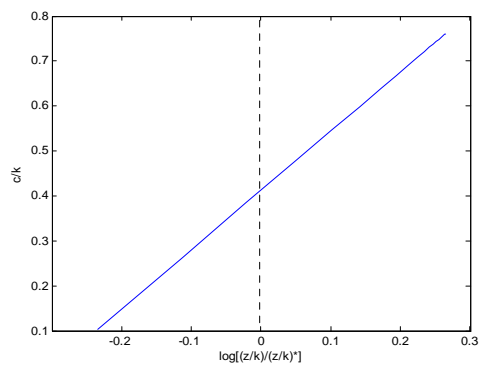


fig 2

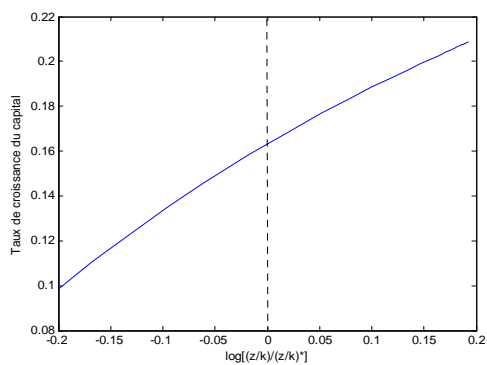


fig 3

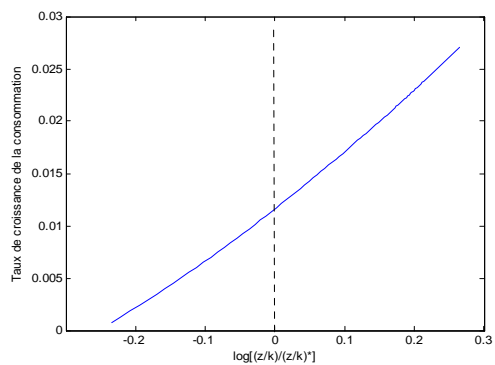


fig 4

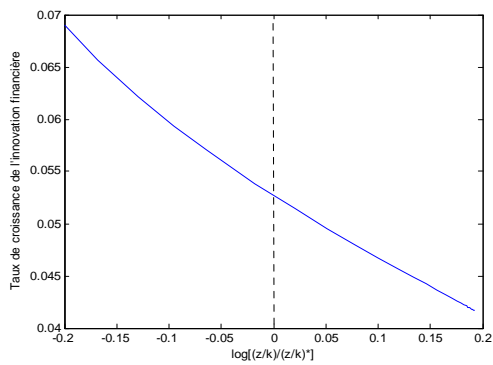


fig 5

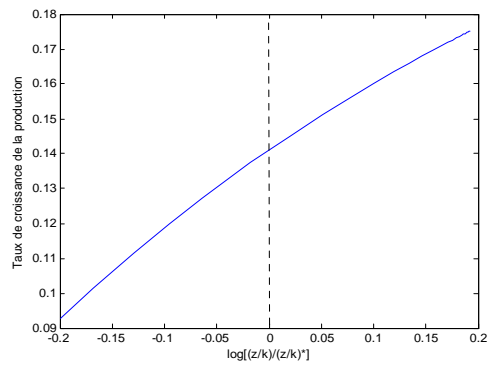


fig 6

<sup>13</sup>Pour  $\alpha = 0.8$  ;  $\beta = 0.3$  ;  $\phi = 0.5$  ;  $A = 1$  ;  $B = 0.15$  ;  $\sigma = 5$  ;  $\rho = 0.02$ .

Après avoir présenté la dynamique transitoire qui met en exergue l'ajustement à court et moyen termes des variables afin d'atteindre l'état stationnaire, il serait intéressant d'évaluer l'évolution du taux de croissance de certaines variables d'intérêt dans le temps. Comme le montre le graphique 7, on peut remarquer que le taux de croissance du capital, de la consommation et de la production sont caractérisés par évolution semblable à court, moyen et long termes. Au cours des premières étapes du processus d'ajustement, on observe une hausse du taux de croissance jusqu'à la valeur optimale. Ensuite la deuxième se traduit par une décroissance du taux de croissance. Enfin au niveau de la dernière étape, on observe une stagnation de la croissance. Dans le cas de notre modèle, la croissance à long terme du capital s'établit à 4%. Par contre l'évolution du taux de croissance de l'innovation financière dans le temps est caractérisée par une croissance suivie d'une stagnation à long terme.

La stabilisation globale de l'économie à long terme se traduit par stagnation du taux de croissance de la production, du capital, de la consommation et de l'innovation financière comme l'illustrent bien le graphique 7. Cette dynamique semble bien décrire le processus qui régit l'évolution des pays vers le développement économique.

Graphique 7 : Evolution du taux de croissance de quelques variables dans le temps<sup>14</sup>

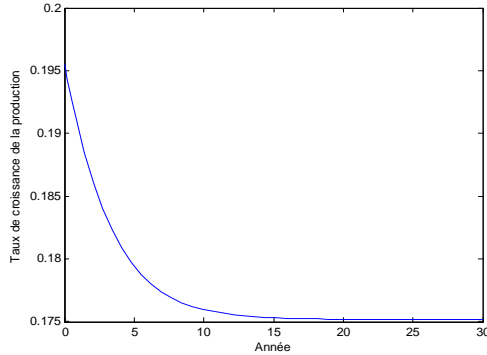


fig 1

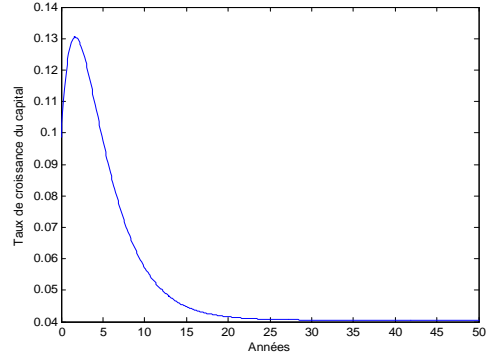


fig 2

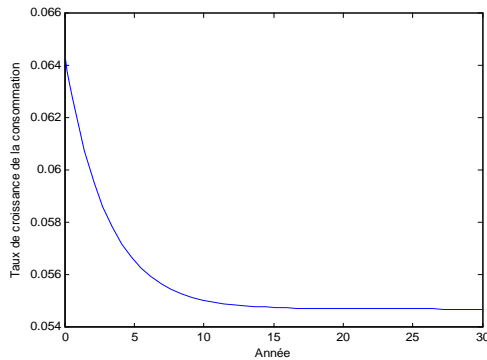


fig 3

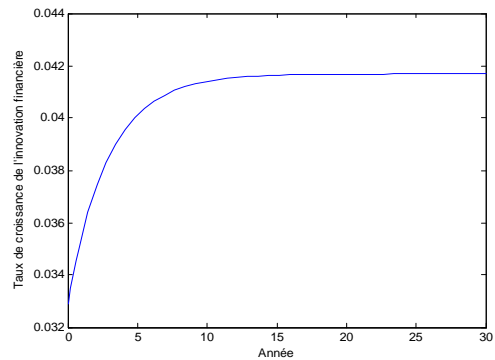


fig 4

## 6 Conclusion

Dans le présent document, nous avons mis en évidence un modèle de croissance endogène dans lequel le secteur financier est caractérisé par une dynamique de l'innovation financière semblable au secteur de la recherche et développement ou de l'accumulation dans des connaissances dans les modèles de Lucas (1988), Romer (1990) et Jones (1995). Ainsi, le secteur financier par l'intermédiaire de la branche de l'innovation

<sup>14</sup>Les valeurs des paramètres sont :  $\alpha = 0.8$  ;  $\beta = 0.3$  ;  $\phi = 0.5$  ;  $A = 1$  ;  $B = 0.15$  ;  $\sigma = 5$  ;  $\rho = 0.02$ .

a pour mission d'élaborer de nouveaux produits ou précédés financiers capables d'accroître la sophistication du secteur financier, le rendement des investissements et aussi la diversification et l'optimisation du risque. Pour ce faire, l'innovation financière est utilisée d'une part comme facteur de production et d'autre part comme vecteur de transformation de l'épargne en investissement.

L'innovation financière étant caractérisée par une équation dynamique, on obtient un équilibre entre le niveau de croissance économique et celui de l'innovation financière qui est dépendant des paramètres de l'économie. Dans ce cas de figure, les recommandations de politiques économiques en vue d'une croissance économique plus forte viseront à réduire la contribution du capital à la production au détriment de l'innovation, à réduire le taux d'escompte psychologique des agents et l'aversion par rapport au risque, et enfin à accroître l'effet de spillover lié au phénomène d'innovation financière. Nous avons également montré que l'optimum atteint par le planificateur social est préférable est celui obtenu à travers une allocation des ressources par le marché ; ce qui justifie la portée des interventions publiques dont le but est de corriger les imperfections liées au marché. L'analyse de la dynamique transitoire a permis de mettre en évidence la réaction des différentes variables suite aux chocs à court terme et les ajustements à réaliser compte tenu du niveau de développement de chaque pays, pour que ce dernier puisse converger vers l'état stationnaire.

Comme extensions possibles, on peut également supposer des dynamiques de l'innovation financière basée soit sur la destruction créatrice (Aghion et Howitt, 1992) ou soit sur la complémentarité technologique.

## References

- [1] ABRAMOVITZ, M. (1956). "Resource and Output Trends in the United States since 1870", *American Economic Review, Papers and Proceedings of the American Economic Associations*, Vol. 46, pp. 5-23.
- [2] AGHION, P. AND HOWITT, P. (1992). "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica*, Vol. 60, pp. 323-351.
- [3] ARROW, K. J. (1962). "The Economic Implications of Learning by Doing", *The Review of Economic Studies*, Vol. 29, N°3, pp. 155-173.
- [4] BARRO, R. J. (1990). "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, N°5, pp. S103-S125.
- [5] BARRO, R. J. AND SALA-I-MARTIN, X. (1992). "Public Finance Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, Vol. 59, pp. 645-662.
- [6] BARRO, R. J. AND SALA-I-MARTIN, X. (1990b). "Economic Growth and Convergence across the United States", Working Paper N°3362, NBER, Cambridge, MA.

- [7] BERTHLEMY, J. C. AND VAROUDAKIS, A. (1994). “Intermédiation Financière et Croissance Endogène”, *Revue Economique*, Vol 3, 737-750.
- [8] BERTHLEMY, J. C. AND VAROUDAKIS, A. (1996). “Développement Financier, Réformes financières et Croissance. Une Approche en Données de Panel”, *Revue Economique*, Vol. 46, N°2, pp. 217-235.
- [9] CASS, D. (1965). “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulative”, *Review of Economic Studies*, Vol. 32, pp. 233-240.
- [10] CHOU, Y. (2003a). “A Pedagogical Tool for Illustrating the Real Impact of Financial Sector”, Document de Recherche N°888, Université de Melbourne.
- [11] CHOU, Y. (2003b). “Modelling the Impact of Network Social Capital on Business and Technological Innovations”, Document de Recherche N°890, Université de Melbourne.
- [12] CHOU, Y. (2004). “Technological Revolutions and Financial Innovations”, Document de Recherche N°901, Université de Melbourne.
- [13] CHOU, Y. AND CHIN, M. (2001). “Financial Innovation and Endogenous Growth”, Document de Recherche N°804/7/2001, Université de Melbourne.
- [14] CHOU, Y. K. AND CHIN, M. S. (2004). “Financial Innovations and Technological Innovations as Twin Engines of Economic Growth”, Document de Recherche, Université de Melbourne.
- [15] FLOOD, M. D. (1992). “Two Faces of Financial Innovation”, Federal Reserve Bank of St Louis, Mineo.
- [16] FRAME, W. S. AND WHITE, L. J. (2002). “Empirical Studies of Financial Innovation : Lots of Talk, Little Action?”, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper N°2002-12.
- [17] GOLDSMITH, W. (1968). *Financial Institutions*, Random House, New York.
- [18] GREENWOOD, J. AND JOVANOVIC, B. (1990). “Financial Development, Growth, and the Distribution of Income”. *Journal of Political Economy*, Vol. 98, N°5, pp. 1076-1107.
- [19] GUELLEC, D. (1992). “Croissance Endogène : les Principaux Mécanismes”, *Economie et Prévision*, Vol. 106, pp. 41-50.
- [20] JONES, C. (1995). “R&D-Based Models of Economic Growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 103, N°4, pp. 759-784.
- [21] JONES, C. (2000). *Théorie de la Croissance Endogène*, De Boeck Université, Paris, Bruxelles.

- [22] KENYES, J. M. (1936). *Théorie Générale de l'Emploi, de l'Intérêt et de la Monnaie*, Edition PAYOT, Paris, 1966.
- [23] KING, R. AND LEVINE, R. (1993). "Finance, Entrepreneurship, and Growth : Theory and Evidence", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 32, pp. 513-542.
- [24] KING, R. AND REBELO, S. (1990). "Public Policy and Economic Growth : Developing Neoclassical Implications", *Journal of Political Economy*, Vol. XCVIII, pp. S126-S150.
- [25] KOOPMANS, T. C. (1965). "On the Concept of Optimal Economic Growth". In ROMER, P. (1986). "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, N°5, pp. 1002-1037.
- [26] LUCAS, R. (1988). "On the Mechanics of Economic development", *Journal of Monetary Economics*, Vol 22, pp. 3-42.
- [27] MAC KINNON, R. (1973). *Money and capital in economic development*, The Brookings Institution, Washington, D.C.
- [28] MODIGLIANI, F. AND MILLER, M. H. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment", *American Economic Review*, Vol. 48 (June), pp. 261-297.
- [29] MULLIGAN, C., B. (1991). "A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Economic Models", NBER Technical Working Paper, N° 116.
- [30] MULLINGAN, C. B. AND SALA-I-MARTIN, X. (1993). "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 103, N°3 (August 1993), pp. 739-773.
- [31] PAGANO, M. (1993). "Financial Market and Growth: An Overview", *European Economic Review*, Vol. 37, 613-622.
- [32] RAJHI, T. (1991). "Croissance Endogène avec Externalités des Dépenses Publiques", *Revue Economique*, Vol. 44, N°2, pp. 335-368.
- [33] REBELO, S. (1991). "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. XCIV, pp. 500-521.
- [34] ROMER, P. (1986). "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, N°5, pp. 1002-1037.
- [35] ROMER, P. (1990). "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, N°5, pp. S71-S102.
- [36] ROUBINI, N. AND SALA-I-MARTIN, X. (1992). "Financial Repression and Economic Growth", *Journal of Development Economics*, Vol. 39, pp. 5-30.

- [37] ROUBINI, N. AND SALA-I-MARTIN, X. (1995). "A Growth Model of Inflation, Tax Evasion, and Financial Repression", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 35, pp. 275-301.
- [38] SAINT-PAUL, G (1992). "Technological Choice, Financial Markets and Economic Development", *European Economic Review*, Vol. 36, N°4, pp. 763-781.
- [39] SCHUMPETER, J. (1950). *Capitalism, Socialism and Democracy*, 3rd Edition, New York : Harper & Brothers.
- [40] SEMEDO, G. AND VILLIEU, P. (1998). *Mondialisation, Intégration Economique et Croissance : Nouvelles Approches*, Ed. l'Harmattan.
- [41] SHAW, E. (1973). *Financial Deepening in Economic Development*, New York: Oxford University Press.
- [42] SIDRAUSKI, M. (1967). "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy", *American Economic Review*, Vol. 57, pp. 534-544.
- [43] SOLOW, R. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* 70 (February), 65-94.
- [44] UZAWA, H. (1965). "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review*, Vol 6 (Janvier), pp. 18-31.
- [45] VAN HORNE, J. (1985). "Of Financial Innovations and Excesses", *Journal of Finance*, Vol. 40, N°3, pp. 621-636.

## 7 Annexe

Le programme que va résoudre le planificateur social est le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{c_t, u_t} U_0 &= \int_0^\infty \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \exp(-\rho t) dt, & (38) \\ s/c \\ \dot{k}_t &= \left[ \frac{z_t}{k_t} \right]^\phi [A((1-u_t)k_t)^\alpha z_t^{1-\alpha} - c_t] \\ \dot{z}_t &= B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Le Hamiltonien courant du programme ci-dessus est le suivant :

$$\begin{aligned} H_c \equiv & \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left[ \left( \frac{z_t}{k_t} \right)^\phi (A[(1-u_t)k_t]^\alpha z_t^{1-\alpha} - c_t) \right] & (39) \\ & + \mu [B(u_t k_t)^\beta z_t^{1-\beta}], \end{aligned}$$

où  $c_t$  et  $u_t$  sont des variables de contrôle,  $k_t$  et  $z_t$  des variables d'état,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des variables duales associées respectivement à  $k_t$  et  $z_t$ . Dans la suite du document, pour des raisons de simplicité, nous allons occulter les indices temporels.

Les conditions de premier ordre sur les variables de contrôle sont :

$$\frac{\partial H_c}{\partial c} = c^{-\sigma} - \lambda z k^\phi = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial u} = -\lambda \left( \frac{z}{k} \right)^\phi A z^{1-\alpha} k^\alpha \alpha (1-u)^{\alpha-1} + \mu B \beta u^{\beta-1} k^\beta z^{1-\beta} = 0. \quad (41)$$

On peut établir que :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\beta g}{A \alpha z_k^{-\alpha+\phi} (1-u)^{\alpha-1} u} \quad (42)$$

Le long du sentier de croissance équilibré, toutes les variables croissent au même taux  $g$ .

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left[ \frac{z}{k} \right]^\phi [A(1-u)^\alpha k^{\alpha-1} z^{1-\alpha} - \frac{c}{k}] = g \quad (43)$$

$$\frac{\dot{z}}{z} = B u^\beta z_k^{-\beta} = g \quad (44)$$

Les conditions de premier ordre par rapport aux variables d'état donnent :

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \lambda\rho - \lambda \left[ -\phi \frac{z}{k^2} \left(\frac{z}{k}\right)^{\phi-1} (A[(1-u)k]^\alpha z^{1-\alpha} - c) + A(1-u)^\alpha \alpha k^{\alpha-1} z^{1-\alpha} \left(\frac{z}{k}\right)^\phi \right] \\ &\quad - \mu B u^\beta \beta k^{\beta-1} z^{1-\beta},\end{aligned}\tag{45}$$

$$= \lambda\rho + \lambda \left[ \phi g - A\alpha(1-u)^\alpha z_k^{1-\alpha+\phi} \right] - \mu\beta g z_k\tag{46}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \mu\rho - \lambda \left[ \frac{\phi}{k} \left(\frac{z}{k}\right)^{\phi-1} (A[(1-u)k]^\alpha z^{1-\alpha} - c) + A[(1-u)k]^\alpha (1-\alpha) z^{-\alpha} \left(\frac{z}{k}\right)^\phi \right] \\ &\quad - \mu \left[ B(uk)^\beta (1-\beta) z^{-\beta} \right].\end{aligned}\tag{47}$$

$$= \mu\rho - \lambda \left[ \phi \frac{g}{z_k} + A(1-\alpha)(1-u)^\alpha z_k^{-\alpha+\phi} \right] - \mu(1-\beta)g\tag{48}$$

Enfin, les conditions de transversalité sont :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)k(t) \exp(-\beta t) = 0,\tag{49}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t)z(t) \exp(-\beta t) = 0.\tag{50}$$

Remplaçons  $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$  par son expression dans les deux équations précédentes :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho + \phi g - A\alpha(1-u)^\alpha z_k^{1-\alpha+\phi} - \frac{\mu}{\lambda}\beta g z_k,\tag{51}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \frac{\lambda}{\mu} \left[ \phi \frac{g}{z_k} + A(1-\alpha)(1-u)^\alpha z_k^{-\alpha+\phi} \right] - (1-\beta)g.\tag{52}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho + \phi g - A\alpha(1-u)^{\alpha-1} z_k^{1-\alpha+\phi},\tag{53}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \frac{\beta\phi g^2}{A\alpha z_k^{1-\alpha+\phi}(1-u)^{\alpha-1}u} - \frac{(1-\alpha)(1-u)}{\alpha u}\beta g - (1-\beta)g.\tag{54}$$

On sait que :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\sigma \frac{\dot{c}}{c} = -\sigma g.\tag{55}$$

$$g = \frac{1}{\sigma} \left[ A\alpha(1-u)^{\alpha-1} z_k^{1-\alpha+\phi} - \rho - \phi g \right]\tag{56}$$

A partir de cette expression, on peut déduire que :

$$A\alpha(1-u)^{\alpha-1} z_k^{1-\alpha+\phi} = \rho + (\phi + \sigma)g\tag{57}$$

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \text{ or } \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\sigma g, \text{ donc } \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\sigma g. \quad (58)$$

On a donc :

$$\rho - \frac{\beta\phi g^2}{A\alpha z_k^{1-\alpha+\phi}(1-u)^{\alpha-1}u} - \frac{(1-\alpha)(1-u)}{\alpha} \frac{\beta g}{u} - (1-\beta)g = -\sigma g \quad (59)$$

En remplaçant  $A\alpha z_k^{1-\alpha+\phi}(1-u)^{\alpha-1}$  par  $\rho + (\phi + \sigma)g$  (d'après 57) dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\beta\phi}{\left[\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)\right]u} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha u} \beta = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + \sigma - (1-\beta) + \frac{\rho}{g} \quad (60)$$

On peut donc déduire l'expression analytique de  $u$  :

$$u^* = \frac{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + \frac{\beta\phi}{\frac{\rho}{g} + (\phi + \sigma)}}{\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \beta + (\sigma + \beta - 1) + \frac{\rho}{g}} \quad (61)$$

A priori si on arrive à déterminer  $u^*$ , on peut déduire l'expression d'équilibre des autres variables.

$$z_k^* = \left( \frac{\rho + (\phi + \sigma)g}{A\alpha(1-u^*)^{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha+\phi}} \quad (62)$$

$$= \left( \frac{\rho + (\phi + \sigma)g}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha+\phi}} (1-u^*)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\phi}} \quad (63)$$

$$\text{car } \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\alpha A z_k^{1-\alpha+\phi} (1-u)^{\alpha-1} + \phi g + \rho = -\sigma g \quad (64)$$

On peut également trouver que :

$$B u^\beta z_k^{-\beta} = g \Rightarrow z_k = \left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* \quad (65)$$

$$c_k^* = A (z_k^*)^\alpha (1-u^*)^{1-\alpha} - \frac{g}{(z_k^*)^\phi} \quad (66)$$

A partir des équations (62) et (65), on peut déterminer analytiquement l'expression de  $g$ . Ce résultat peut être obtenu également par graphique.

$$\left( \frac{B}{g} \right)^{\frac{1}{\beta}} u^* = \left( \frac{\rho + (\phi + \sigma)g}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha+\phi}} (1-u^*)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha+\phi}}. \quad (67)$$